社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

ダフィング方程式に基づく電子回路向けカオスダイナミクスとアナログ電子回路によるカオス共鳴実験

石村　憲意†　　浅井　哲也†　　本村　真人†

† 北海道大学大学院情報科学研究科　〒060–0814 北海道札幌市北区北１４条西９丁目
E-mail: †ishimura@lalsie.ist.hokudai.ac.jp

あらまし　確率共鳴は雑音を有効に利用した現象のひとつとして挙げられる．確率共鳴の観測には，二重井戸型ポテンシャルの系に，その二重井戸間にある閾を超えない程度の微弱信号と適度な雑音を加える必要がある．一方で，カオス共鳴が近年注目されている．この現象は，二重井戸型ポテンシャルのカオス系に，確率共鳴と同様に閾を超えない程度の微弱信号を入力することで観測出来る．カオス共鳴は，確率共鳴における外部雑音源を，カオスシステムが有する揺らぎが担っている．つまり，外部雑音源を用意する必要なく，カオスを有する系のパラメータを調整する事で，確率共鳴と同等に動作する事が出来る．本研究では，カオス共鳴を観測する回路を実装する為に，二重井戸型のカオス系であるダフィング方程式を特性を保持したまま近似した．次に，近似した擬似ダフィング方程式を用いて，回路シミュレーションおよび個別部品回路で実装を行い，カオス共鳴が生じている事を確認した．そして，個別部品回路ではカオス共鳴が起きている範囲において SNR を算出した．

キーワード　カオス共鳴，ダフィング方程式，ゆらぎ

Circuit-Oriented Chaos Dynamics based on the Duffing Equation and Experiments of Chaotic Resonance with Analog Electronic Circuits

Kazuyoshi ISHIMURA†, Tetsuya ASAI†, and Masato MOTOMURA†

† Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University
Kita 14, Nishi 9, Kita-ku, Sapporo, Hokkaido, 060–0814 Japan
E-mail: †ishimura@lalsie.ist.hokudai.ac.jp

Abstract　Stochastic resonance (SR) is one of the phenomena where dynamic noises are effectively used to induce state transition in a double-well potential system with subthreshold driving forces. The noises are given to the system as an additional force, which results in the requirement of extra noise sources. Recently, a phenomenon called "chaotic resonance" (CR) has been spotlighted in the literature. CR can be observed in chaotic systems which have i) multiple strange attractors and ii) ability to accept external forces to cause transitions between the attractors. In such chaotic systems, chaotic fluctuation, instead of noises in SR systems, could effectively be used to cause the attractor transition, which may result in CR under certain parameter conditions; *i.e.*, CR systems do not require any external noise source, unlike traditional SR systems. In this report, we employed the Duffing system as a possible candidate of CR systems. To demonstrate CR on electronic analog circuits, we introduce a modified Duffing system which is described by dynamics of harmonic oscillators with a nonlinear transition function. We then implement the modified Duffing system, and conduct the SPICE simulations as well as the experiments by using discrete MOS devices. The circuit was driven by a sinusoidal voltage source as a subthreshold driving force, and the frequency was swept to control the oscillation modes (chaotic or periodic). In a certain range of the frequency, we observed chaotic transition between two operational regions, whereas no transition between the operational regions was observed in the other frequency range, which indicated that chaotic fluctuation certainly assisted the state transition.

Key words　chaotic resonance, Duffing equation, fluctuation

1. まえがき

電子回路において，特にアナログ回路において雑音はシステムの挙動に障害をもたらすものとして，雑音を低減や除去する方向で，研究開発されてきている．一方で，生体は外部の熱雑音等を有効に利用して情報処理を行っている事がわかってきている [1] [2]．この事から，雑音を除くことに注力するのではなく，むしろ雑音を積極的に利用した回路の研究が盛んに行われている [3] [4] [5].

雑音が有効に利用されている一例として，確率共鳴現象があげられる．確率共鳴は，従来のシステムでは正しく信号を検出できないような微小信号と共に，適度な雑音を入力する事で確率的にシステムが動作するようになり，信号を検出する現象である．これは例えば，二つの井戸型ポテンシャルと適度な雑音源とポテンシャルを超えない程度の外部入力，という条件があれば観測される現象である.

また，近年ではカオス共鳴が注目されて来ている．カオス共鳴は，内部にゆらぎを有する系に対して微弱信号を入力する事により，出力を検知することができるようになる現象である．これは，確率共鳴における雑音源をカオス系のゆらぎが担っていると考えられる．このメカニズムは二つのアトラクタを持つカオス系において，パラメータを変化させることで２つのアトラクタが結合し，両アトラクタ間を遷移するようになる状態である．外部からの雑音源を必要とせず，微弱信号の入力のみによりパラメータが変化し，システムの応答が入力信号により確率的に動作可能となる現象である．外部から程よい雑音を実装することは容易ではないため，システム自体が有するゆらぎを利用することは有益であると考えられる．例えば，下オリーブニューロンにおける情報の誤差信号の伝達が，カオス共鳴により行われている可能性が示唆されている [6] [7] [8]．これはニューロンが微弱信号により，自らゆらぎを生み出して情報伝達の効率化を図っているものと考えられる．このように生体においてカオス共鳴の有用性が研究されてきている．つまり，生体は外部雑音だけではなく自らに生じるカオス的なゆらぎもまた積極的に利用していると考えられる．さらに，確率共鳴と比較して，カオス共鳴の方が応答性に優れているとする研究がある.

本研究では，二重井戸型ポテンシャルを有するダフィング系に対して回路実装が容易になるように変形を行い，その回路シミュレーションで動作を確認した．次に回路実装を行い，同様に特性を調べ，カオス共鳴を確認した．また，このときのカオス共鳴がおこる周波数範囲における SNR を算出し，信号の伝達特性の評価を行った.

2. 擬似ダフィング系におけるカオス共鳴

2.1 ダフィング系を用いたカオス共鳴

カオス共鳴は，カオスが持つゆらぎと二つ以上のポテンシャル井戸を持つカオス系に対し，ポテンシャル井戸間にある閾を超えない程度の微弱信号入力して系を揺らすことによって生じると考えられる．このような条件を満たす特性を持つ代表的なカオス系として，ダフィング系，ダブルスクロール系やローレンツ系などが挙げられる．これらの系の中でダブルスクロール系とローレンツ系は自励発振系であり，外部入力項は含まれていない．ダブルスクロール系とローレンツ系に外部入力項を加えたモデル [9] [10] [11] があることから，カオス共鳴を発生させる事は可能であると考えられる，一方で，ダフィング系はその系の中に外部入力項を有する事から，最も容易にカオス共鳴が生じる要件を満たしていると考えられる．そこで，本研究ではカオス共鳴を観測する為にダフィング系を利用した．ダフィング方程式は

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\delta y + \beta x - \alpha x^3 + \gamma \cos(\omega t) \end{cases} \tag{1}$$

と表される．ここで，δ は減衰項，β は負の時にポテンシャル関数が二重井戸型になり，正の時は井戸が一つとなる．α は正の時は強い復元力を，負の時は弱い復元力を表し，γ は外部入力の振幅を表す．本論文では $\delta > 0$，$\beta < 0$ の時のパラメータのダフィング方程式をモデルとした．一般にこのときのダフィング系の振る舞いは図 1 のようにカオス的であるか，周期的であるか，あるいは図 2 および図 3 のように正または負のどちらか一方の領域にトラップされる．また，このダフィング系のヌルクラインは図 4 のようになる． ダフィング方程式のポテンシャル関数は図 5 のようになり，井戸が $x = 0$ を境に正と負に

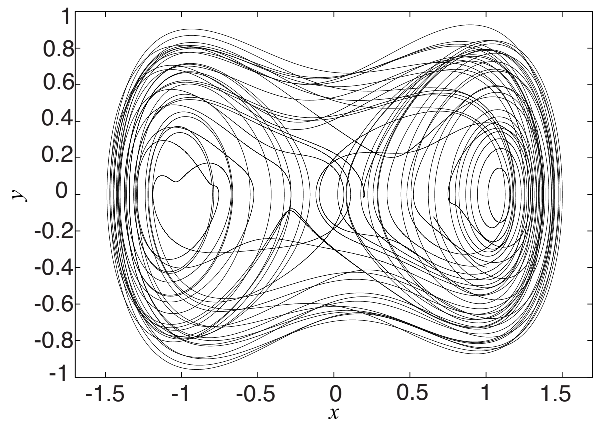

図 1 ダフィング方程式の位相平面 ($\delta = 0.2$, $\beta = \alpha = 1$,$\gamma = 0.3$)

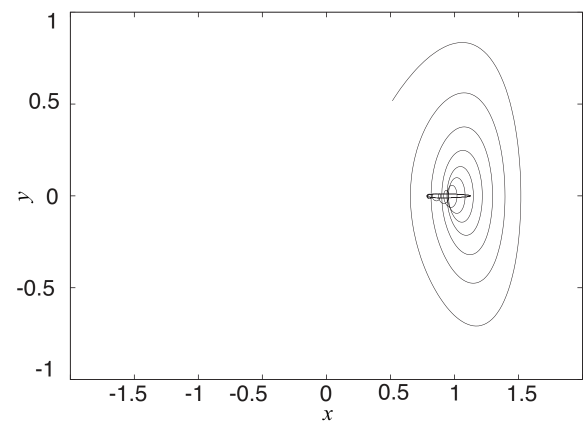

図 2 正の領域にトラップされているときのダフィング方程式の位相平面 ($\delta = 0.2$, $\beta = \alpha = 1$,$\gamma = 0.1$)

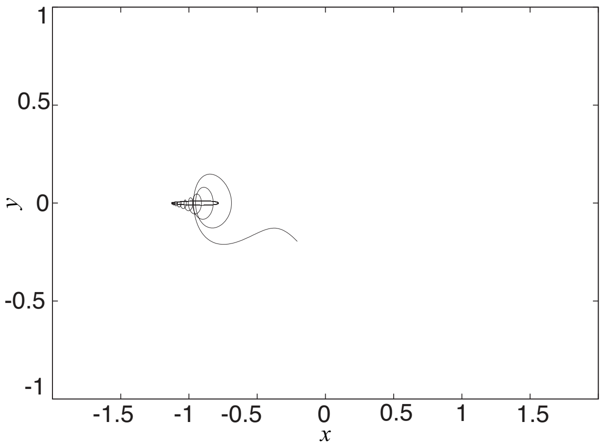

図 3　負の領域にトラップされているときのダフィング方程式の位相平面 ($\delta = 0.2$, $\beta = \alpha = 1$,$\gamma = 0.1$)

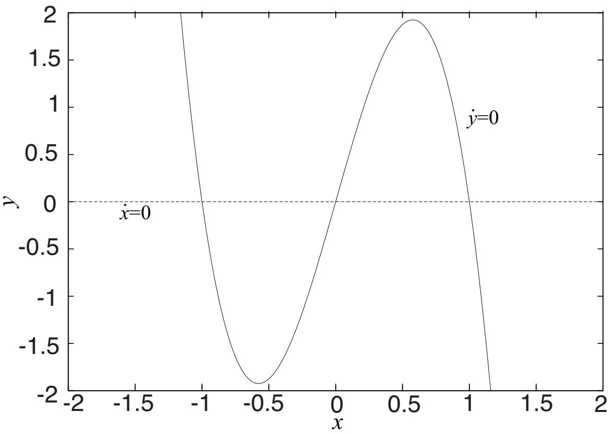

図 4　ダフィング方程式のヌルクライン ($\delta = 0.2$, $\beta = \alpha = 1$)

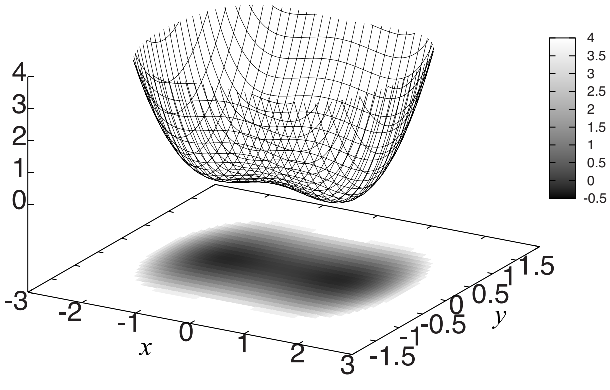

図 5　ダフィング方程式のポテンシャルの概形 ($\delta = 0.2$, $\beta = \alpha = 1$,$\gamma = 0.1$)

二つ存在することが確認できる．ここで，この正の領域を領域 1，負の領域を領域 0 と定義する．

2.2　擬似ダフィング系

強制減衰ダフィング系では減衰項により状態が常に井戸の安定点へと向かって行く為に，二領域間の遷移の頻度は減衰項の無いダフィング系よりも少なくなる，つまり，入力に対する出力の相関が低くなるものと考えられる．そこで，カオス共鳴を観測しやすくするために，二領域間の遷移が容易な (回路実装も容易な) 非減衰ダフィング方程式を考える．定性的にはダフィング方程式と等価であるように，

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \tanh(\beta(x-y)) + A\cos(\omega t) \end{cases} \tag{2}$$

と近似する．ここで第一項と第二項は負性抵抗項を表し，第三項は外力を表す．この擬似ダフィング系のヌルクラインは図 6 のようになる．減衰項の無いダフィング系と同様に，この系はハミルトン系であり，そのハミルトニアンの導出の過程を以下に示す．求めるハミルトニアンを x または y で偏微分すると

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{\beta}\mathrm{lncosh}\beta(x-y) \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dfrac{1}{2}y^2 \end{cases} \tag{3}$$

となる．ここで，(3) 式第二項の $\frac{1}{\beta}\mathrm{lncosh}\beta(x-y)$ において，β が無限大に大きいとして，$|x-y|$ と近似する．これにより，(i)$x-y<0$ と (ii)$x-y>0$ で場合分けすると，

(i)$x-y<0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{1}{2}x^2 + x - y + (\dfrac{1}{2}y^2 + y) \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dfrac{1}{2}y^2 + (\dfrac{1}{2}x^2 + x) \end{cases} \tag{4}$$

(ii)$x-y>0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{1}{2}x^2 - x + y + (\dfrac{1}{2}y^2 - y) \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dfrac{1}{2}y^2 + (\dfrac{1}{2}x^2 - x) \end{cases} \tag{5}$$

となる，以上 (4) 式と (5) 式をまとめて，擬似ダフィング系のハミルトニアンは

$$H(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + a|x-y| \tag{6}$$

と表される．

以上から求められたハミルトニアンによりこの提案式の概形は図 7 のように表される．この図から，提案する擬似ダフィング系は $y=x$ 上に閾が存在し，正と負の二つの領域にポテンシャル井戸が形成されていることがわかる．ここで，二つのポテンシャル井戸のうち，負の側を領域 0，正の側を領域 1 と定

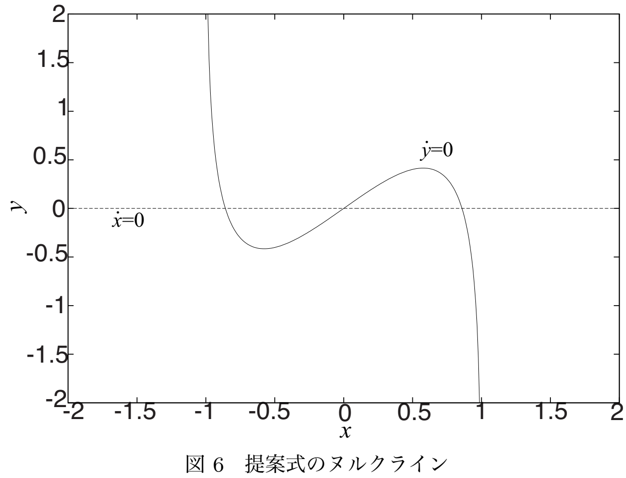

図 6　提案式のヌルクライン

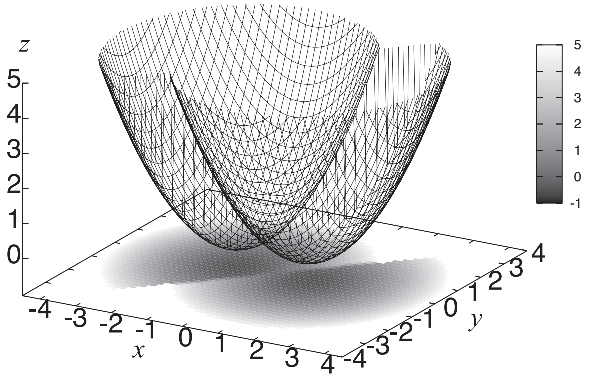

図 7　擬似ダフィング系のハミルトニアン

義する．それぞれダフィング系と擬似ダフィング系のヌルクラインを表す図 4 と図 6，とポテンシャル関数を表す図 5 と図 7 を比較すると，提案式はおおよそダフィング系と同等の性質を有しており，この擬似ダフィング系は減衰の無いダフィング系を定性的に近似できていると考えられる．

3．回路シミュレーション

次に擬似ダフィング系を ngspice 上で回路化し，入力信号周波数をパラメータとして変化させてシミュレーションを行い，状態の井戸へのトラップや遷移の様子を観測した．擬似ダフィング系を回路化する際に，

$$\begin{cases} \tau\dot{x} = y \\ \tau\dot{y} = -x + a\mathrm{sgn}(x-y) + A\sin(2\pi ft) \end{cases} \tag{7}$$

のように，式 (7) 二行目の右辺第二項を，提案した擬似ダフィング系の式 (2) 第二項 $\tanh(\beta(x-y))$ における β が非常に大きいとして，sgn 関数で近似を行った．これにより，回路化する際に非線形関数項はコンパレータにより容易に実現出来る．また，この式は図 1 に示す回路の node1 における電流の式に対応している．x，y は図 8 の節点 x，節点 y での電位に対応している．a，A も電圧として設計しており，$\tau = CR$，$a = RV_{dd}/r$ である．

入力信号は $A\sin(2\pi ft)$ の電流源で，オペアンプの電源電圧は ±5 V である．使用した回路素子と，その値は，オペアンプ LMC6482IN，R=1 MΩ，r=5 MΩ，C=1 pF である．これにより式 (7) の τ および a の値が 1 となる．このシミュレーションにおいて，入力信号の振幅は 0.5 V で一定にし，周波数をパラメータとして値を変化させていく．

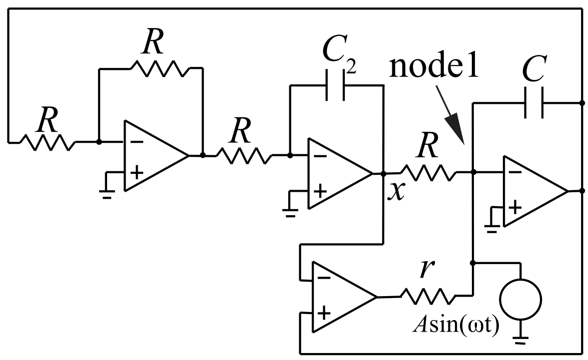

図 8　擬似ダフィン系の回路図

図 9 の (a) と (c) に示すように周波数が 0.01 Hz と低い時は，初期値の取りうる値によって，正または負のどちらかの領域にトラップされる様子が確認出来る．つまり，片方の領域から他方の領域に遷移することが出来ない，ポテンシャルを超えない程度の微弱な信号が入力されていることがわかる．また他領域に遷移するたけの揺らぎもこの周波数では生じていない，図 9 の (b) と (d) はそれぞれ図 9 の (a) と (c) の時系列波形であり，実線が位相平面の縦軸 y を表していて，点線が位相平面の横軸 x を表している．状態が二つの井戸のどちらかにトラップされている時は，x が常に正または負の値のみを取っている事がわかる．

ところが，周波数 0.1 Hz の時は図 9 の (e) に示すように，状態が正と負の 2 つの領域を遷移するようになる．これは先ほどの片方の領域にトラップされていた状態から，どちらか一方の領域にトラップされること無く，常に二つの領域を確率的に遷移している状態に変化していることがわかる．つまり，本来は他領域に遷移出来ない程度の微弱な入力信号においても，入力周波数によっては系のゆらぎと共鳴することによって，確率的に二つの井戸間の閾を越えて遷移することが出来るようになる．図 9 の (f) の時系列データからも x が確率的に 2 つの領域を遷移している事が見て取れる．これはカオス共鳴が生じていることによって 2 領域間の遷移が確率的に起きていると考える事ができる

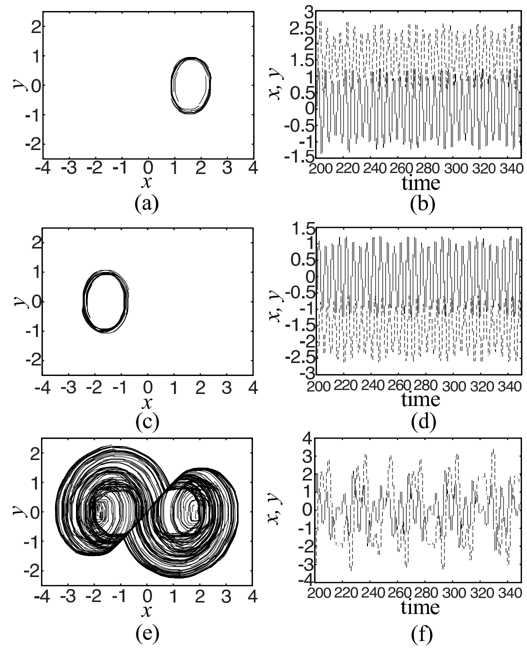

図 9　回路シミュレーションにおける位相平面 ((a)0.01Hz，(c)0.01Hz，(e)0.1Hz) と時系列波形 ((b)0.01Hz，(d)0.01Hz，(f)0.1Hz)

4．実　　験

次に提案式を回路化した図 8 を個別部品で回路実装し，カオス共鳴の観測と SNR による評価を行った．使用するオペアンプは回路シミュレーションと同様に LMC6482IN であり，回路

素子の値は R=1 MΩ，r=5 MΩ，C=0.0047μF である．図 8 の回路の外部入力の信号強度 $A = 0.5$ V は一定に，周波数をパラメータとして変化させる．周波数 $f = 15$Hz の時の節点 x, 節点 y における位相平面を図 10 の (a)，初期値を変えた位相平面を (c) に示す．それぞれの時系列波形が (b) と (d) である．

これより，信号強度 $A = 0.5$ V では初期値の設定により，正か負のどちらか片方の井戸にトラップされ続けるので，回路シミュレーションの時と同様に入力振幅は，二つの井戸間の閾を超えることができない程度の微小信号であり，この時の入力周波数では，領域を遷移するほどのゆらぎも生じていないことがわかる．次に $f = 33$Hz の時の位相平面を図 10 の (e)，時系列波形を (f) に示す．これから，片方の井戸にトラップされたときと同じ振幅の微小信号であっても，ある周波数で閾値を超えて二つの領域を遷移する様子を確認できる．これは回路シミュレーションの時と同様にカオス共鳴が起き，ある入力周波数に対し，ゆらぎが共鳴して二つ領域間を確率的に遷移する事ができるようになった為と考えられる．

図 11 に，入力周波数を 10 Hz から 50 Hz まで 1 Hz 間隔でスイープさせた時の分岐図を示す．これから周波数が 28 Hz から 38 Hz の範囲において，カオス共鳴によって正負間を遷移している領域が存在している事がわかる．また，それ以外の周波数では片方の井戸にトラップされている．

さらにここでは，図 12 に，常に遷移している時の入力周波数である 28 Hz から 38 Hz の範囲における周波数対 SNR の特性を示す．この SNR を算出する際には出力信号を正と負の符号関数で 2 値化する．これによって，カオス共鳴が起きて二領域を遷移するようになっている状態のみ値が算出されるようになる．SNR のピークは揺らしている外力の周波数と同じになる時である．また，状態が片方の領域にトラップされているときは，二値化された出力は 1，または -1 のどちらか一方の値のみを出力し続けるため，SNR を計算する事ができない．このように状態遷移のみを評価する事で，両方の領域に遷移しているときに SNR が高く表される．これにより，電子回路上でカオス共鳴が生じていることを確認した．

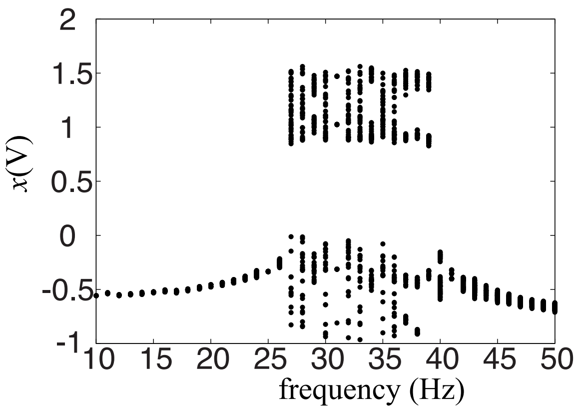

図 11　実装回路の入力信号周波数をパラメータとして 1Hz 刻みでスイープしたときの分岐特性

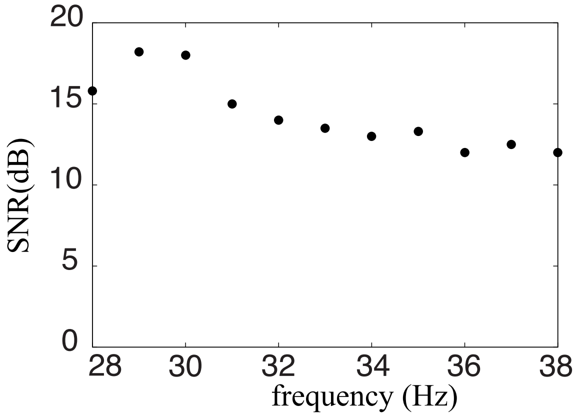

図 12　実装回路の正と負の 2 領域を確率的に遷移している周波数区間における SNR

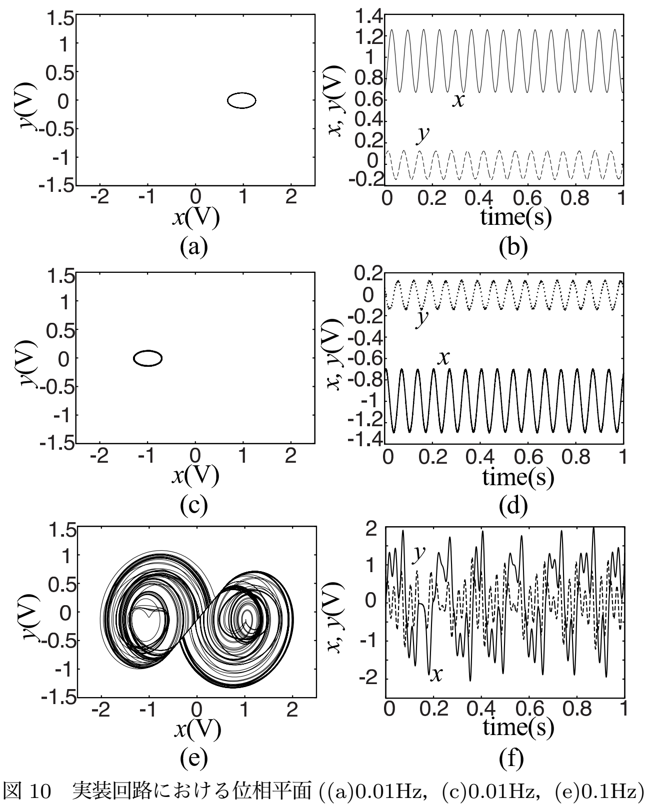

図 10　実装回路における位相平面 ((a)0.01Hz，(c)0.01Hz，(e)0.1Hz) と時系列波形 ((b)0.01Hz，(d)0.01Hz，(f)0.1Hz)

5. 考　　察

回路シミュレーションと電子回路における実測において，時定数によって動作する入力信号周波数帯は異なるものの，初期値によって正または負の領域にトラップされる様子や，カオス共鳴が生じて二領域間を確率的に遷移する様子を確認出来た．カオス共鳴を時系列データの解析を行っていくと，提案した系がハミルトニアン系であるため，非線形効果を強く受けるのは領域間を遷移する時のみである．それゆえ，その系内での振る舞いは初期位置に強く依存すると考えられる．つまり，すべてのパラメータを固定して初期位置のみを変更した場合においても片方の領域にトラップされる時と，カオス的、あるいは周期的に振る舞う時がある．この為に，カオス共鳴をより確実に観測するには，この初期値依存の度合いを少なくする為，減衰項

を系に含んでいることが望ましいと考えられる．そこで，現在は強制減衰ダフィング方程式と，提案式に減衰項を加えた式の２つにおいて同様のシミュレーションを行っている，これらは減衰項により常に井戸の安定点へ向かって行く為に，２領域間の遷移の頻度はハミルトン系よりも少なくなる，つまり，入力に対する出力の相関が低くなるものと考えられる．この２領域間の遷移がカオス共鳴によるものか，別の要因によるものかについて引き続き調べている．また，SNR を求める時に，二つの領域を遷移する振る舞いが，カオス的であるか，周期的であるかにより，SNR の値が異なってくると考えられる．その特別な場合として，１周期解が得られると，出力は入力にほぼ完全に追従すると考えられる．本稿の焦点はカオス共鳴現象であり，系が持つカオス的なゆらぎにより信号検出の増強を図るものであるが，周期的な応答は，微弱な入力信号に対して，系の周期的なゆらぎが重なり，共鳴することで，２つの領域間を周期的に遷移している為に生じている．カオス系には無数の周期窓があり，カオス系によっては，周期解の範囲が広いものもある，このため，周期解における二領域間の遷移現象について検討することも意義があると考えられる．また，確率共鳴であれば，SNR はノイズの強度に強く依存し，ノイズが足りない時は微小信号をシステムが検知できず，ノイズ強度を徐々にあげていくと入力信号に対して出力応答が追従するようになり，SNR は上昇していく．ところが，さらに雑音強度をあげると入力信号と無関係に出力応答をするようになるために，SNR が減少する．一方で，本稿の 擬似ダフィング系によるカオス共鳴では，２つの領域間を確率的に遷移するようになる周波数範囲では SNR が算出されるが，その範囲での SNR のピークは確率共鳴ほど顕著に現れず．ある周波数範囲においてのみシステムが動作する，このことから，微小信号に対するバンドパスフィルタとして動作させることも可能であると考えられる．

6. ま と め

本研究では，カオス共鳴現象を容易に観測する回路を実装するために，ダフィング系を基に二重井戸型の非減衰擬似ダフィング系を提案した．そして，提案回路のシミュレーションと個別部品での回路実装，測定を行った．提案した系において外部入力信号強度を，閾値を越えて二つの領域を遷移しない程度の強さに設定し，信号周波数をパラメータとして変化させ，カオス共鳴の観測を行った．この結果，ある周波数の範囲では状態が正負の二つの領域を確率的に遷移し，それ以外の周波数範囲では状態の初期値によって，どちらか一方の領域にトラップされることを確認した．特に前者の状態はカオス共鳴によって生じていると考えられる．今後は引き続き，この二領域間の確率的遷移とカオス共鳴の関連性を詳しく調べ，カオス共鳴現象を利用した工学的な応用についても考えていくつもりである．

文 献

[1] M. A. Arbib, ”The Handbook of Brain Theory and Neural Networks,” MIT Press, Cambridge, MA, 1995.

[2] YAMANAKA Toshio, MORIE Takashi, NAGATA Makoto, IWATA Atsushi, ”A CMOS Stochastic Associative Processor Using PWM Chaotic Signals(Special Issue on Integrated Systems with New Concepts),” IEICE transactions on electronics E84-C(12), pp. 1723-1729, 2001.

[3] 宇田川 玲, 浅井 哲也, 吉田 和徳, 雨宮 好仁, ”電子回路で容易に実装可能な二重井戸ポテンシャル系における確率共鳴～オペアンプ一個でできる確率共鳴実験～,” 電子情報通信学会 非線形問題研究会, 2010.

[4] 浅井 哲也, 宇田川 玲, 雨宮 好仁, ”ゆらぎを積極的に利用する生体様ハードウェア,” 日本神経回路学会誌, vol. 15, No. 1, pp. 18-26, 2008.

[5] 下澤 楯夫, ”神経系は熱雑音をも利用する,” 生物物理 40(3), pp. 156-161, 2000.

[6] Isao T. Tokuda, Cheol E. Han, Kazuyuki Aihara, Mitsuo Kawato, Nicolas Schweighofer ”The role of chaotic resonance in cerebellar learning,” Neural Networks, 23 pp. 836-842, 2010.

[7] N. Schweighofer, K. Doya, H. Fukai, J. V. Chiron, T. Furukawa and M. Kawato, ”Chaos may enhance information transmission in the inferior olive,” PNAS, vol. 101 No. 13, pp.4655-4660, 2004.

[8] 信川 創，西村 治彦，堅田 尚郁, ”下オリーブニューロンの FitzHugh-Nagumo 型モデルにおけるカオス共鳴現象,” 信学技報, NC2007-182, pp. 415-420, 2008.

[9] K. Murali, M. Lakshmanan, ”Chaotic dynamics of the driven Chua’s circuit,” IEEE Circuits and Systems Society, vol.40, pp. 836 - 840, 1993.

[10] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll, ”Driving systems with chaotic signals,” Phys. Rev. A 44, 1991.

[11] Chol-Ung Choe, Hartmut Benner, Yuri S. Kivshar, ”Chaos suppression in the parametrically driven Lorenz system,” Phys Rev E, vol. 72, 6pages, 2004.